

DS de mathématiques n°1

Logique, calcul algébrique dans $\mathbb{R}$ – Corrigé

Noté sur 51 pts $\pm 2,5$ pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramenée sur 20 en multipliant par 20/50

Exercice 1 – Autour de la suite de Fibonacci

/14,5

On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, & u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

On peut facilement vérifier que tous les termes de cette suite sont positifs : on pourra utiliser ce résultat sans le démontrer sur la copie.

1) Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5 .

/0,75

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + u_0 = \boxed{1} \\ u_3 &= u_2 + u_1 = 1 + 1 = \boxed{2} \\ u_4 &= u_3 + u_2 = 2 + 1 = \boxed{3} \\ u_5 &= u_4 + u_3 = 3 + 2 = \boxed{5} \end{aligned}$$

2) Montrer par récurrence simple que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$3u_n \leq 2u_{n+1} \leq 4u_n$$

/4,5

Barème détaillé :

- 0,5 pour la rédaction.
- 0,5 pour l'initialisation.
- 3,5 pour l'hérédité.

On raisonne par récurrence simple.

- Pour $n = 2$, on a $\begin{cases} 3u_2 = 3 \\ 2u_3 = 4 \\ 4u_2 = 4 \end{cases}$ donc l'inégalité est vérifiée.
- Soit $n \geq 2$ un entier. On suppose que $3u_n \leq 2u_{n+1} \leq 4u_n$. Montrons que $3u_{n+1} \leq 2u_{n+2} \leq 4u_{n+1}$. Or :

$$\begin{aligned} 3u_{n+1} &\leq 2u_{n+2} \leq 4u_{n+1} \\ \iff 3u_{n+1} &\leq 2u_{n+1} + 2u_n \leq 4u_{n+1} \\ \iff u_{n+1} &\leq 2u_n \leq 2u_{n+1} \\ \iff u_{n+1} &\leq 2u_n \text{ et } u_n \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

- Montrons que $u_{n+1} \leq 2u_n$. Par hypothèse de récurrence, on a $2u_{n+1} \leq 4u_n$, donc on en déduit que $u_{n+1} \leq 2u_n$.
- Montrons que $u_n \leq u_{n+1}$. On a :

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \geq u_n \quad \text{car } u_{n-1} \geq 0$$

On a donc bien $3u_{n+1} \leq 2u_{n+2} \leq 4u_{n+1}$.

Finalement, l'assertion est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

3) On considère la suite de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$. Pour alléger l'écriture des calculs, on pose $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

a) Calculer v_0 et v_1 .

/0,75

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \times 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \times 1 = \boxed{0}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \times (1+\sqrt{5} - (1-\sqrt{5})) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \times 2\sqrt{5} \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 \geq 0$.

/1

Le discriminant de ce polynôme est

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-1) = 5$$

Comme $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles :

$$x_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \quad \text{et} \quad x_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \psi$$

Ainsi, (comme le coefficient dominant est positif)

$$\mathcal{S} = \boxed{] - \infty, \psi] \cup [\varphi, +\infty[}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v_{n+2} - v_{n+1} - v_n = 0$.

/4

$$\begin{aligned}
& v_{n+2} - v_{n+1} - v_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\psi^{n+2} - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\psi^{n+1} \right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\psi^n \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n \times (\varphi^2 - \varphi - 1) + \frac{1}{\sqrt{5}}\psi^n \times (\psi^2 - \psi - 1)
\end{aligned}$$

Or, par la question précédente, on sait que φ et ψ sont les racines du polynôme $x^2 - x - 1$. Ainsi, $\varphi^2 - \varphi - 1$ et $\psi^2 - \psi - 1$ sont nuls. Par suite, on a bien $\boxed{v_{n+2} - v_{n+1} - v_n = 0}$.

d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n$. /3,5

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = v_n$. On raisonne par récurrence double.

- Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a vu que $u_0 = 0 = v_0$ et $u_1 = 1 = v_1$. Donc la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = v_n$ et $u_{n+1} = v_{n+1}$. Montrons que $u_{n+2} = v_{n+2}$. Par la question précédente, on a

$$v_{n+2} = v_{n+1} + v_n = u_{n+1} + u_n = u_{n+2}$$

d'où le résultat au rang $n + 2$.

Finalement, on a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n}$.

Exercice 2 – Quelques équations /7,5

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$|-2x^2 - x + 6| = 4x - 1$$

/2,5

On remarque que

$$|-2x^2 - x + 6| = |2x^2 + x - 6|$$

On va donc déterminer le signe de $2x^2 + x - 6$. (comme -2 est racine évidente :)

$$2x^2 + x - 6 = (x - 2)(2x + 3)$$

Donc les racines sont 2 et $-\frac{3}{2}$. Ainsi, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	$3/2$	$+\infty$
$2x^2 + x - 6$		+	-	+

On disjoint les cas :

- Si $x \leq -2$ ou $x \geq \frac{3}{2}$, l'équation devient

$$\begin{aligned}
2x^2 + x - 6 &= 4x - 1 \\
\iff 2x^2 - 3x - 5 &= 0 \\
\iff (x + 1)(2x - 5) &= 0 \\
\iff x = -1 \text{ ou } x = \frac{5}{2} \\
\iff x = \frac{5}{2} \text{ car } x \leq -2 \text{ ou } x \geq \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas,

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

- Si $x \in \left[-2, \frac{3}{2} \right]$, l'équation devient

$$\begin{aligned}
-2x^2 - x + 6 &= 4x - 1 \\
\iff -2x^2 - 5x + 7 &= 0 \\
\iff 2x^2 + 5x - 7 &= 0 \\
\iff (x - 1)(2x + 7) &= 0 \\
\iff x = 1 \text{ ou } x = -\frac{7}{2} \\
\iff x = 1 \text{ car } x \in \left[-2, \frac{3}{2} \right]
\end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas,

$$\mathcal{S}_2 = \{1\}$$

Finalement

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \boxed{\left\{ 1, \frac{5}{2} \right\}}$$

2) Montrer que pour tout réel x :

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor = \lfloor 3x \rfloor$$

/5

On pose $k = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon = x - k \in [0, 1[$. Comme $x = k + \varepsilon$, on a :

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor &= \lfloor 3x \rfloor \\ \iff k + \left\lfloor k + \varepsilon + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor k + \varepsilon + \frac{2}{3} \right\rfloor &= \lfloor 3k + 3\varepsilon \rfloor \\ \iff k + k + \left\lfloor \varepsilon + \frac{1}{3} \right\rfloor + k + \left\lfloor \varepsilon + \frac{2}{3} \right\rfloor &= 3k + \lfloor 3\varepsilon \rfloor \\ \iff \left\lfloor \varepsilon + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \varepsilon + \frac{2}{3} \right\rfloor &= \lfloor 3\varepsilon \rfloor \end{aligned}$$

Montrons donc cette dernière égalité. On disjoint les cas :

- Si $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{3}$, on a :

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \leq \varepsilon + \frac{1}{3} < \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \leq \varepsilon + \frac{2}{3} < 1 \\ 0 \leq 3\varepsilon < 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \left\lfloor \varepsilon + \frac{1}{3} \right\rfloor = 0 \\ \left\lfloor \varepsilon + \frac{2}{3} \right\rfloor = 0 \\ \lfloor 3\varepsilon \rfloor = 0 \end{cases}$$

donc on a bien égalité.

- Si $\frac{1}{3} \leq \varepsilon < \frac{2}{3}$, on a :

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \leq \varepsilon + \frac{1}{3} < 1 \\ 1 \leq \varepsilon + \frac{2}{3} < \frac{4}{3} \\ 1 \leq 3\varepsilon < 2 \end{cases} \implies \begin{cases} \left\lfloor \varepsilon + \frac{1}{3} \right\rfloor = 0 \\ \left\lfloor \varepsilon + \frac{2}{3} \right\rfloor = 1 \\ \lfloor 3\varepsilon \rfloor = 1 \end{cases}$$

donc on a bien égalité.

- Si $\frac{2}{3} \leq \varepsilon < 1$, on a :

$$\begin{cases} 1 \leq \varepsilon + \frac{1}{3} < \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \leq \varepsilon + \frac{2}{3} < \frac{5}{3} \\ 2 \leq 3\varepsilon < 3 \end{cases} \implies \begin{cases} \left\lfloor \varepsilon + \frac{1}{3} \right\rfloor = 1 \\ \left\lfloor \varepsilon + \frac{2}{3} \right\rfloor = 1 \\ \lfloor 3\varepsilon \rfloor = 2 \end{cases}$$

donc on a bien égalité.

Finalement, on a bien montré le résultat voulu.

Exercice 3 – Une équation fonctionnelle

/5

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$(E) : \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy - 1$$

/5

Barème détaillé :

- 1 point pour la rédaction de l'analyse-synthèse.
- 3 points pour l'analyse.
- 1 point pour la synthèse.

On raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse : soit f une fonction solution de (E). Pour $x = y = 0$, on a donc

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0) + f(0) - 1 \\ \implies f(0) &= 1 \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $y = x$, on obtient

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x) + f(x) - 2x^2 - 1 \\ \implies 1 &= 2f(x) - 2x^2 - 1 \\ \implies f(x) &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

- Synthèse : soit $f : x \mapsto x^2 + 1$. Vérifions si f est solution de (E). Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} &f(x) + f(y) - 2xy - 1 \\ &= x^2 + 1 + y^2 + 1 - 2xy - 1 \\ &= x^2 + y^2 - 2xy + 1 \end{aligned}$$

et

$$f(x - y) = (x - y)^2 + 1 = x^2 + y^2 - 2xy + 1$$

Ainsi, f est bien solution.

Finalement,

$$\mathcal{S} = \{f\} \quad \text{avec } f : x \mapsto x^2 + 1$$

Exercice 4 – Une inéquation à paramètre

/9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ en discutant selon le paramètre m :

$$\sqrt{mx + 1} \geq x$$

On pourra discuter selon les cas $m = 0$, $m > 0$ et $m < 0$.

/9

- Pour $m = 0$, l'équation devient $1 \geq x$, donc dans ce cas,

$$\mathcal{S}_m =]-\infty, 1]$$

- Pour $m > 0$, l'équation n'a un sens que si $mx + 1 \geq 0$, i.e. $x \geq -\frac{1}{m}$, donc si $x \in \mathcal{D}$ avec $\mathcal{D} = \left[-\frac{1}{m}, +\infty\right[$.

- Si $x \leq 0$, alors comme $\sqrt{mx+1} \geq 0$, le réel x est nécessairement solution. On a donc dans ce cas

$$\mathcal{S}_{m,1} = \left[-\frac{1}{m}, 0\right]$$

- Si $x > 0$, alors on a

$$\begin{aligned} \sqrt{mx+1} \geq x &\iff mx+1 \geq x^2 \\ &\iff x^2 - mx - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme est

$$\Delta = m^2 + 4 > 0$$

Il y a donc 2 racines réelles distinctes :

$$x_{\pm} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2}$$

si bien que

$$x^2 - mx - 1 \leq 0 \iff x_- \leq x \leq x_+$$

Cependant, x doit aussi respecter la condition $x > 0$ (et $x \geq -\frac{1}{m}$). On remarque que

$$m^2 + 4 > m^2 \quad \text{donc} \quad \sqrt{m^2 + 4} > |m| = m$$

si bien que $x_- < 0$. Par ailleurs, comme $m > 0$, on a clairement $x_+ > 0$. Finalement, dans ce cas

$$\mathcal{S}_{m,2} =]0, x_+]$$

Ainsi, si $m > 0$, on a

$$\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_{m,1} \cup \mathcal{S}_{m,2} = \left[-\frac{1}{m}, \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right]$$

- Pour $m < 0$, l'équation n'a un sens que si $mx + 1 \geq 0$, i.e. $x \leq -\frac{1}{m}$ (l'inéquation change de sens car $m < 0$), donc si $x \in \mathcal{D}$ avec $\mathcal{D} = \left]-\infty, -\frac{1}{m}\right]$.

- Si $x \leq 0$, là encore l'inéquation est vérifiée. Comme $-\frac{1}{m} > 0$, la condition $x \leq 0$ l'emporte sur $x \in \mathcal{D}$: dans ce cas, on a donc

$$\mathcal{S}_{m,1} =]-\infty, 0]$$

- Si $x > 0$, avec des calculs similaires, on trouve que

$$\sqrt{mx+1} \geq x \iff x \in [x_-, x_+]$$

Cette fois, comme $m < 0$, on a $x_- < 0$. De plus, on a :

$$m^2 + 4 > m^2 \quad \text{donc} \quad \sqrt{m^2 + 4} > |m| = -m$$

ce qui entraîne que $x_+ > 0$. On en conclut que, dans ce cas, x est solution si et seulement si $x \in]0, x_+]$ et $x \in \mathcal{D}$. Ainsi, dans ce cas,

$$\mathcal{S}_{m,2} = \left]0, \min\left(x_+, -\frac{1}{m}\right)\right]$$

Il reste à déterminer le minimum entre x_+ et $-\frac{1}{m}$. On résout donc, par exemple, $-\frac{1}{m} \leq x_+$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m} &\leq \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \\ &\iff -\frac{2}{m} - m \leq \sqrt{m^2 + 4} \end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs, on pose dans la suite $M = -m > 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{2}{M} + M &\leq \sqrt{M^2 + 4} \\ &\iff \left(\frac{2}{M} + M\right)^2 \leq M^2 + 4 \\ &\iff \frac{4}{M^2} + 4 + M^2 \leq M^2 + 4 \\ &\iff \frac{4}{M^2} \leq 0 \end{aligned}$$

On constate que cette inégalité n'est jamais vérifiée. On a donc toujours

$$-\frac{1}{m} > \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}$$

On en conclut que $\min\left(-\frac{1}{m}, x_+\right) = x_+$. (Autre méthode : en posant $P(x) = x^2 - mx - 1$, on aurait pu aussi remarquer que $P\left(-\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m^2} > 0$, si bien que $-\frac{1}{m}$ se trouve à l'extérieur de l'intervalle $[x_-, x_+]$. On a donc $-\frac{1}{m} < x_-$ ou $-\frac{1}{m} > x_+$. Le premier cas est impossible car $x_- < 0$). Ainsi, on a donc :

$$\mathcal{S}_{m,2} =]0, x_+]$$

On en conclut que, si $m < 0$, on a

$$\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_{m,1} \cup \mathcal{S}_{m,2} = \left] -\infty, \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \right]$$

En définitive,

$$\mathcal{S}_m = \begin{cases} \left] -\infty, \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \right] & \text{si } m < 0 \\]-\infty, 1] & \text{si } m = 0 \\ \left[-\frac{1}{m}, \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \right] & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

Exercice 5 – La conjecture de Caramel

/15

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{5}{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = 2^{\frac{1}{3} \times (2^n - (-1)^n)}$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\lfloor u_n \rfloor = a_n$$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier $2^n - (-1)^n$ est un multiple de 3. On ne pourra pas utiliser la formule de factorisation de $a^n - b^n$. /3

On raisonne par récurrence sur n .

- Pour $n = 1$, on a

$$2^n - (-1)^n = 2 - (-1) = 3$$

donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $2^n - (-1)^n$ est un multiple de 3. Montrons qu'il en est de même pour $2^{n+1} - (-1)^{n+1}$. On a

$$2^{n+1} - (-1)^{n+1} = 2^n \times 2 + (-1)^n$$

Or, par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{aligned} 2^n - (-1)^n &= 3k \\ \implies 2^n &= 3k + (-1)^n \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2^{n+1} - (-1)^{n+1} &= (3k + (-1)^n) \times 2 + (-1)^n \\ &= 6k + 2 \times (-1)^n + (-1)^n \\ &= 6k + 3 \times (-1)^n \\ &= 3k' \end{aligned}$$

avec $k' = 2k + (-1)^n$. Comme $k' \in \mathbb{Z}$, la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Ainsi, $2^n - (-1)^n$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- 2) Calculer les valeurs de a_1 , a_2 , a_3 ainsi que u_2 et u_3 . /1,5

On a

$$a_1 = 2^{\frac{2+1}{3}} = \boxed{2}$$

$$a_2 = 2^{\frac{2^2-1}{3}} = 2^1 = \boxed{2}$$

$$a_3 = 2^{\frac{8+1}{3}} = 2^3 = \boxed{8}$$

De plus,

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 \times (u_0^2 - 2) - u_1 \\ &= \frac{5}{2} \times (4 - 2) - \frac{5}{2} \\ &= 5 - \frac{5}{2} \\ &= \boxed{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3 &= u_2 \times (u_1^2 - 2) - u_1 \\
&= \frac{5}{2} \times \left(\left(\frac{5}{2} \right)^2 - 2 \right) - \frac{5}{2} \\
&= \frac{5}{2} \times \frac{17}{4} - \frac{5}{2} \\
&= \boxed{\frac{65}{8}}
\end{aligned}$$

3) Caramel, qui étudie en MPSI, a utilisé la question précédente pour conjecturer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = a_n + \frac{1}{a_n}$$

En supposant cette conjecture vérifiée, montrer que $\lfloor u_n \rfloor = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

/2,5

Par la question 1), il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^n - (-1)^n = 3k$. Ainsi,

$$a_n = 2^{\frac{3k}{3}} = 2^k$$

En particulier, a_n est un entier. On en déduit que

$$\lfloor u_n \rfloor = \left\lfloor a_n + \frac{1}{a_n} \right\rfloor = a_n + \left\lfloor \frac{1}{a_n} \right\rfloor$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\left\lfloor \frac{1}{a_n} \right\rfloor = 0$, ou encore que

$0 \leq \frac{1}{a_n} < 1$. Comme a_n est positif, il suffit de montrer que $\frac{1}{a_n} < 1$, ou encore $a_n > 1$, càd $a_n \geq 2$ car a_n est un entier.

Montrons que $a_n \geq 2$. Pour cela, il suffit de montrer que $k \geq 1$. Or,

$$2^n \geq 2 > (-1)^n$$

donc $2^n - (-1)^n > 0$. On en déduit que $3k > 0$, donc $k > 0$. Comme k est un entier, on a bien $k \geq 1$. Finalement, on a bien

$$\left\lfloor \frac{1}{a_n} \right\rfloor = 0, \text{ donc}$$

$$\boxed{\lfloor u_n \rfloor = a_n}$$

4) Terminer la preuve en vérifiant la conjecture de Caramel.

/8

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$H_n : \quad u_n = a_n + \frac{1}{a_n}$$

On va montrer H_n par récurrence double.

- Pour $n = 1$ et $n = 2$, la question 2) permet de conclure que H_1 et H_2 sont vraies.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que H_n et H_{n+1} sont vraies. Montrons H_{n+2} . On a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1 \\
&= \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) \times \left[\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} \right)^2 - 2 \right] - u_1 \\
&= \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) \times \left[a_{n-1}^2 - 2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} - 2 \right] - u_1
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
a_{n-1}^2 &= \left(2^{\frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3}} \right)^2 \\
&= 2^{2 \times \frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3}}
\end{aligned}$$

Isolons le terme en puissance :

$$\begin{aligned}
&2 \times \frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3} \\
&= \frac{2^n - 2 \times (-1)^{n-1}}{3} \\
&= \frac{2^n + 2 \times (-1)^n}{3} \\
&= \frac{2^n - (-1)^n + 3 \times (-1)^n}{3} \\
&= \frac{2^n - (-1)^n}{3} + (-1)^n
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
a_{n-1}^2 &= 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3} + (-1)^n} \\
&= 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}} \times 2^{(-1)^n} \\
&= a_n \times 2^{(-1)^n}
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) \times \left[a_n \times 2^{(-1)^n} + \frac{1}{a_n \times 2^{(-1)^n}} \right] - u_1 \\
&= a_n^2 \times 2^{(-1)^n} + \frac{1}{2^{(-1)^n}} + 2^{(-1)^n} + \frac{1}{a_n^2 \times 2^{(-1)^n}} - u_1
\end{aligned}$$

D'une part, par le même calcul que pour a_{n-1}^2 , on a :

$$a_n^2 = a_{n+1} \times 2^{(-1)^{n+1}}$$

et en particulier

$$\begin{aligned} a_n^2 \times 2^{(-1)^n} \times 2^{(-1)^{n+1}} &= a_{n+1} \times 2^{(-1)^n \times (1-1)} \\ &= a_{n+1} \times 2^0 \\ &= a_{n+1} \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\frac{1}{2^{(-1)^n}} + 2^{(-1)^n} = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} + \frac{5}{2} + \frac{1}{a_{n+1}} - u_1 \\ &= a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1}} \quad \text{car } u_1 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

On en conclut que H_{n+1} est vraie.

Finalement, on a $\boxed{u_n = a_n + \frac{1}{a_n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.